Selbstähnliche Strukturen in der Natur

Selbstähnliche Objekte werden in der Mathematik durch fraktale Strukturen und einer sogenannten fraktalen Dimension (Hausdorff Dimension) beschrieben. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine solche fraktale Dimension experimentell zu bestimmen.

Aufgabenstellung

Untersuchen Sie ein Objekt und versuchen Sie die Hausdorff-Dimension dieses Objektes zu bestimmen. Am einfachsten ist es die Dimension der Umrandung eines fraktalen Objektes zu bestimmen.

1. Überlegen Sie sich, welches Objekt sie untersuchen wollen. Sprechen Sie sich mit der Lehrperson ab. Die Objekte sollten Sich auf einer Photographie klar von der Umgebung abheben.

   Gute Untersuchungsobjekte sind: Bäume, Blätter, Sträucher, ...
2. Zur Bearbeitung brauchen sie Photographien dieser Objekte. Das Format A4 eigent sich sehr gut zur Bearbeitung. Die Photographien brauchen keine besonders gute Auflösung (min 150 dpi). Drucken Sie die Photos auf A4 Papier aus.
3. Legen Sie eine Rasterfolie auf ihren Ausdruck und kopieren Sie diese Kombination. Wiederholen sie dies mit verschiedenen Rasterfolien. Auf diesen Photographien mit Raster lässt sich am leichtesten arbeiten.
4. Bestimmen Sie die Anzahl der Rasterquadrate welche einen Teil der Umrandung enthalten. Tragen Sie diese in eine Excel-Tabelle ein. Bitte beachten Sie dabei:

   Je mehr verschiedene Rastergrössen Sie benutzen, desto aussagekräftiger Ihre Untersuchung
5. Bestimmen Sie mit Hilfe der Excel-Tabelle die Trendlinie welche den Funktionalenzusammenhang der beiden Grössen (Rastergrösse / Anzahl) beschreibt.
6. Die Potenz der Trendlinie entspricht der fraktalen Dimension des Objektes.

Material

Rasterfolien

Photographien von Bäumen, Stäuchern,...

Zusatzfragen

- Variiert die Dimension von Art zu Art oder ist sie immer etwa gleich?
- Ist die Dimension innerhalb einer Art annähernd konstant?

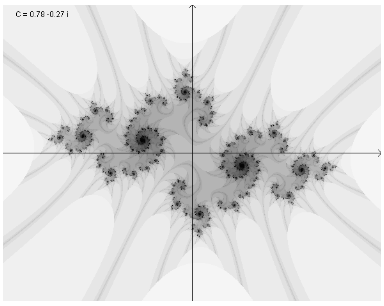
Selbstähnliche Strukturen in der Mathematik

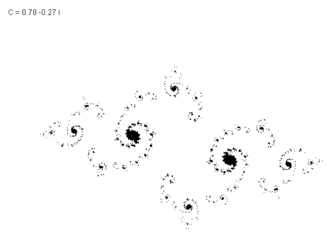
Selbstähnliche Objekte werden in der Mathematik durch fraktale Strukturen und einer sogenannten fraktalen Dimension (Hausdorff Dimension) beschrieben. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine solche fraktale Dimension experimentell zu bestimmen.

Aufgabenstellung

Untersuchen Sie ein Objekt und versuchen Sie die Hausdorff-Dimension dieses Objektes zu bestimmen. Am einfachsten ist es die Dimension der Umrandung eines fraktalen Objektes zu bestimmen.

1. Benutzen Sie die Java Anwendung *Julia-Mengen.jar* um einige Juliamengen zu erstellen. Speichern Sie sich einige Bilder von Juliamengen. Versuchen Sie eine Menge zu erstellen, welche nicht stark verästelt ist und Bilder von stark verästelten Juliamengen.
2. Beachten Sie, dass Sie von jedem Bild eine Kopie machen welche keine Abstufungen und keine Koordinatenlinien aufweist (Optionen wählen).





3. Legen Sie eine Rasterfolie auf ihren Ausdruck und kopieren Sie diese Kombination. Wiederholen sie dies mit verschiedenen Rasterfolien. Auf diesen Photographien mit Raster lässt sich am leichtesten arbeiten.
4. Bestimmen Sie mit den Rasterfolien die Anzahl der Rasterquadrate welche einen Teil der Umrandung enthalten. Tragen Sie diese in eine Excel-Tabelle ein. Bitte beachten Sie dabei:

   Je mehr verschiedene Rastergrössen Sie benutzen, desto aussagekräftiger Ihre Untersuchung
5. Bestimmen Sie mit Hilfe der Excel-Tabelle die Trendlinie welche den Funktionalenzusammenhang der beiden Grössen (Rastergrösse / Anzahl) beschreibt.
6. Die Potenz der Trendlinie entspricht der fraktalen Dimension des Objektes.

Material

Julia-Mengen.jar

Zusatzfragen

Wie variiert die Dimension der Juliamenge wenn Sie den Parameter auf einer Linie von links nach Rechts wählen? Was kann man über die Juliamenge aufgrund der Dimension aussagen?

Fratkale Dimensione eines Knäuels

Ein zerknülltes Papier oder ein Stück Draht welches man zu einem Knäule zusammendrückt kann durch eine gebrochene (fraktale) Dimension beschrieben werden. Mit einem Experiment soll das Skalengesetz eines solchen Knäuels berechnet werden.

Theorie

In der Physik lernt man, dass die folgende proportionalität für Körper gibt:

$$M \propto V \propto r^3$$

Als Proportionalitätsfaktor benutzt man unter anderem, die Dichte des Körpers. Bei Körpern mit gebrochener Dimension gilt dieses Skalengesetz nicht mehr. Die Potenz der Längeneinheit ändert auf einen Zahlenwert kleiner als 3.

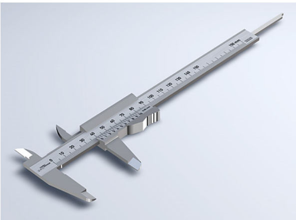
$$M \propto r^d = c \cdot r^d$$

Aufgabenstellung

1. Besorgen Sie sich das zu untersuchende Material. Das Material (Papier, Draht,...) muss zerknüllbar sein und seine zerknüllte From einigermassen stabil halten können. Ansonsten ist das Experiment einfach ein wenig schwieriger.
2. Als Vorbereitung stellen wir verschiedene Knäuel aus demselben Material her. Sie sollten aber verschiedene Grössen aufweisen.
3. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Waage das genaue Gewicht der Knäuel
4. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Messschiebers oder einer Schnur den Durchmesser respektive den Umfang (siehe Material) der Knäuel.
5. Stellen Sie die Daten in einer Exceltabelle zusammen.
6. Bestimmen Sie mit Hilfe der Excel-Tabelle die Trendlinie welche den Funktionalenzusammenhang der beiden Grössen (Masse / Umfang) beschreibt.
7. Die Potenz der Trendlinie entspricht der fraktalen Dimension des Objektes.

Material

Mit dem Messschieber können Sie den Durchmesser der Knäuel bestimmen. Als Alternative kann man ein Stück Schnur nehmen um den Umfang messen zu können. Dies ist bei sehr unregelmässigen Knäueln von Vorteil.



Messschieber

Zusatzfragen

Welche Bedingungen sind zu erfüllen, dass die Trendlinie gut zu den Messpunkten passt (Korrelation nahe bei 1)?

L-System

Mit dem System von Aristid Lindenmayer kann man die Aststruktur einiger Pflanzen simulieren.

Theorie

Aus einer Grundanweisung F (Strich geradeaus) wird durch Iteration einer Ersetzungsregel (F --> F[-F]F[+F]) eine Anweisungskette erzeugt. Diese Anweisungskette bildet die Grundlage für die Konstruktion eines Baumähnlichen Objektes. Je nach Wahl von Grundregel und Ersetzungsregel ist es leicht möglich verschiedene "Bäume" zu erstellen.

Aufgabenstellung

1. Benutzen Sie die Java Applikation *Lindenmayer System.jar* und versuchen Sie das System zu verstehen. Benutzen Sie das Internet um andere Beispiele zu finden.
2. Folgende Befehlszeichen gelten für das benutzte Programm:

F	Gerade zeichnen
f	Strecke bewegen ohne zu zeichnen
X	alternative Strecke
+	Drehung um α Grad nach Rechts
-	Drehung um α Grad nach Links
[]	Neuer Zweig

3. Sollten Sie sich eingearbeitet haben, so suchen Sie sich einen Strauch, eine Pflanze deren Grundgerüst sie nachkonstruieren wollen. Sprechen Sie sich mit der Lehrperson ab, wo und was man suchen soll.

Material

Lindenmayer System.jar

Zusatzfragen

Welche Dimension hat der von Ihnen gezeichnete Baum?

Juliamengen

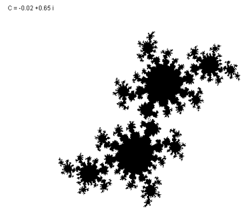
Theorie

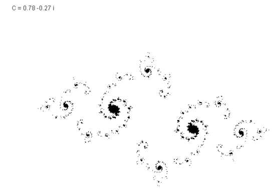
Juliamengen sind die Menge aller Punkte in der Ebene welche bei einer Iteration Gefangene bleiben. Das heisst, die Iteration führt nicht ins „Unendliche“.

$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

Entweder die Folge der Punkte z_n entfernt sich vom Ursprung des Koordinatensystems oder es bleibt in der Nähe des Ursprungs.

Die Juliamengen sind entweder an einem Stück, dass heisst alle Punkt gehören zu einer zusammenhängenden Punktemenge oder die Juliamenge zerfällt in unendlich viele einzelne Punktmengen.





Ob die Menge zusammenhängend oder unzusammenhängend ist, hängt vom Parameter C ab.

Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie die Menge aller Parameter C für welche die zugehörende Juliamenge zusammenhängend ist.
2. Benutzen Sie die Java Applikation Julia-Mengen.jar und testen Sie dies aus.
3. Tragen sie in einen Raster ein, welche Punkte zu welcher Art von Juliamenge führt.

Material

Julia-Menge.jar

Koordinatenraster

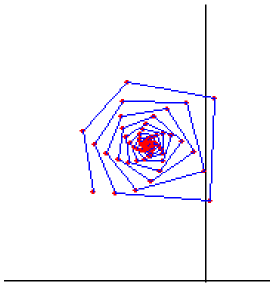
Zusatzfragen

Komplexe Iterationen

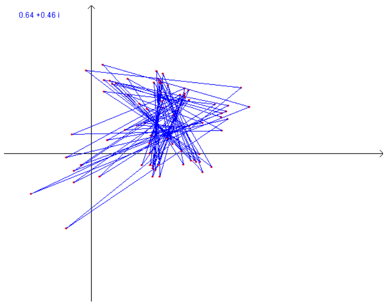
Es sollen Iterationen einer quadratischen Funktion in der komplexen Ebene untersucht werden.

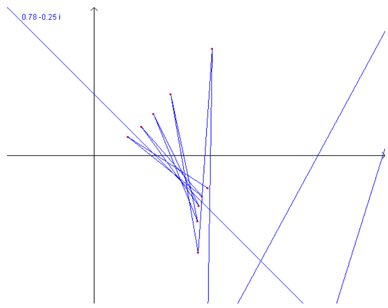
Theorie

Ausgehend von einem Punkt in der Gaussschen Zahlenebene, der komplexen Zahl Z, wird eine Iteration gestartet. In jedem Schritt wird zu einer anderen Zahl gesprungen. Dies liefert einen Polygonzug in der komplexen Ebene.



Diese Iteration, deren Grundlage eine quadratische Funktion ist, soll untersucht werden. Gesucht ist die sogenannte Gefangenenmenge, d.h. Alle Punkte der Ebene für welche dieser Polygonzug in der Nähe des Koordinatenursprungs bleibt.





Aufgabenstellung

1. Starten Sie die Applikation *Komplexe Iteration.jar* und probieren sie ein wenig aus.
2. Sie sollen auf einen separaten Raster einzeichnen, welche Punkte zur Gefangenenmenge gehören. Machen Sie sich einen Plan zurecht, wie sie diese Menge effizient bestimmen könnnen.

   Vorsicht: die gesuchte Menge ist eine fraktale Menge!
3. Dokumentieren Sie Ihre Untersuchung mit einigen Bildern mit interessanten Polygonzügen.

Material

Komplexe Iterationen.jar

Rasterpapiert

Zusatzfragen

Mit dem Vornamen eines französischen Mathematikers, lässt sich die Lösung direkt einzeichnen.

Turingtest

Alan Turing entwckelte eine Testsituation um die "Intelligenz" eines Computers zu prüfen. Lernen Sie was der Turingtest ist und suchen Sie einige Beispiele für einen solchen Test.

Theorie

Der Turingtest ist als Test für Intelligenz sehr umstritten. Aus diesem Grund wird der Turingtest, wie es Turing übrigens auch tat, als Imitationsspiel bezeichnet. Das Imitationsspiel bringt aber deutliche Unterschiede zwischen Computer und Mensch zutage.

Das Ziel dieses Projektes ist es diese Unterschiede zu belegen. Sie sollen dabei aber keinen eigenen Test entwickeln.

Aufgabenstellung

1. Recherchieren Sie. Welche Einwände gibt für den Turingtest? Welche hat Alan Turing vorausgesehen, welche nicht?
2. Suchen Sie einen Turingtest für Schachcomputer.
3. Besuchen Sie ELIZA von Joseph Weizenbaum. Wie funktioniert dieses Programm?
4. Wie würden Sie einen Turingtest gestalten?

Material

Artikel "Computing Machinery and Intelligence" von Alan Turing

Internet

Zusatzfragen

Wie wird Intelligenz definiert. Was meinen Sie zu dieser Definition.

lernende Maschinen

Ist eine Maschine schlau wenn Sie ein Spiel lernt und besser wird als ein Mensch?

Theorie

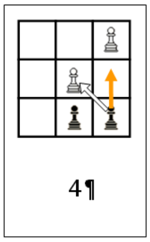
Einfache, endliche Spiele lassen sich mit Streichholzschateln gut zu einer lernenden Maschine umbauen. Alle Spielzüge werden auf Streichholzschachteln geklebt und sinnvoll geordnet.

Aufgabenstellung

1. Spielen Sie ein wenig mit dem Spiel Hexapawn. Beachten Sie, dass nicht genz alle Spielzüge enthalten sind. Welche fehlen? Kann man auch ohne diese Spielen?
2. Spielen Sie Hewapawn gegen die Maschine. Zeichnen Sie auf, wer wie oft gewinnt.
3. Suchen Sie sich ein Spiel für welches sie ebenfalls eine lernende Maschine bauen könnten.
4. Planen Sie den Bau der Maschine. Für die durchführung werden Sie keine Zeit im Kurs haben.

Material

Hexapawn Maschine



Zusatzfragen

Wie schnell lernt die Maschine wenn man neben bestrafendem Lernen für schlechte Züge auch gute Züge belohnt?